



## Серия №16. Иррациональности

10 июля

1. Известно, что  $a, b, c, d$  – рациональные числа, и при этом  $a + b\sqrt{7} = c + d\sqrt{7}$ . Докажите, что тогда  $a = c$  и  $b = d$ .
2. Иррациональны ли числа:
  - а)  $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ ,
  - б)  $\sqrt{5\sqrt{2} - 1} + (\sqrt{2} - 3)\sqrt{\sqrt{2} + 1}$ ,
  - в)  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ ?
3. Целые числа  $m, n$  таковы, что  $\sqrt{m} + \sqrt[3]{n}$  – целое число. Верно ли, что оба слагаемых – целые числа?
4. Существуют ли такие попарно различные целые числа  $a, b, c$ , не являющиеся точными квадратами, что  $a + b\sqrt{c} = b + c\sqrt{a}$ ?
5. При каких натуральных  $n$  число  $(\sqrt{2} + 1)^n - (\sqrt{2} - 1)^n$  будет целым? Будет ли оно четным?
6. Четно или нечетно число  $[(45 + \sqrt{2026})^{100}]$ ?
7. Существуют ли такие целые числа  $m, n \geq 1$ , что  $(5 + 3\sqrt{2})^n = (3 + 5\sqrt{2})^m$ ?
8. На калькуляторе можно делать одну из трёх операций: находить сумму двух чисел, находить разность двух чисел, находить число, обратное данному (не к нулю, естественно). Также можно запоминать результаты любого количества вычислений, но вносить в память другие числа запрещено. Изначально в памяти калькулятора есть два числа:  $\sqrt{2}$  и  $\sqrt{3}$ . Можно ли на этом калькуляторе получить какое-нибудь целое число, отличное от нуля? Калькулятор не округляет.
9. Изначально на доску выписали числа  $1 - \sqrt{2}, \sqrt{2}$  и  $1 + \sqrt{2}$ . Каждую минуту с доски стираются все три написанных на ней числа  $x, y$  и  $z$ , а вместо них на доску записываются числа  $x^2 + xy + y^2, y^2 + yz + z^2$  и  $x^2 + xz + z^2$ . Могут ли в некоторый момент все три числа на доске оказаться рациональными?